量子場理論での状態と量子インストルメント

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)

E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

量子場理論の数学的定式化として，互いに関係がある以下の 2 つがある [1]：

1. von Neumann の量子力学の延長上にある，場の量を Hilbert 空間上の（一般に非有界の）**作用素値超関数**として定義する Wightman 流の定式化

2. 有界時空領域 $\mathcal{O}$ における物理量のなす作用素代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ のあつまりである**局所ネット** $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ （$\mathcal{K}$ は考察している時空における有界時空領域の集合）に基づいて量子場を記述する Araki-Haag-Kastler 流の定式化

後者は，Hilbert 空間上の有界作用素として実現可能な代数系を用いる定式化であり，前者の場合も，場の量から生成される多項式環が ***-代数**となる。ここで，*-代数とは，代数であって，行列の随伴（転置共役）の一般化にあたる**対合** $A\mapsto A^*$ （反線型・冪等などの性質を満たす代数自身への写像）をもつもののことである。量概念を扱ううえで代数のレベルの重要性が認識されるに至ったのは，量子論とその数理が大きく貢献したことによる。行列の固有値分解の一般化にあたる，作用素のスペクトル分解ができる代数系である **von Neumann 代数**など作用素代数には様々なクラスがある。本稿で扱うのは，**C*-代数**と呼ばれるクラスであり，*-代数であり von Neumann 代数を含むクラスとなっている。C*-代数では，スペクトル分解は必ずしもできないが**連続関数カルキュラス**（自己共役元 $A=A^*$ と連続関数 $f(x)$ に対し $f(A)$ が存在すること）が可能である。C*-代数の枠組みでは，物理系の物理量は C*-代数の自己共役元により記述される。

量子場理論の難しさは，すでに（作用素値超関数および）局所ネットの定義に現れている。というのも，抽象的に定義される局所ネットには，本来明示的に扱いたい量子場のダイナミクスが取り込まれているからである。局所ネットとは，仮定する時空 M の有界時空領域 $\mathcal{O}$ ごとに，物理量のなす C*-代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ を考える対応のことであり，また，その集まり $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ （$\mathcal{K}$ は M の有界時空領域の集合）を意味する。ただし，以下の条件を常に満たしていると仮定する：

1. $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ ならば，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)\subset\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.

2. $\mathcal{O}_3$ と $\mathcal{O}_4$ が互いに空間的（spacelike）ならば，$\mathcal{A}(\mathcal{O}_3)$ の元と $\mathcal{A}(\mathcal{O}_4)$ の元は互いに可換である。

1 つ目の条件は包含関係を保つという条件であり，2 つ目の条件は空間的な 2 領域の 2 つの物理量の間の両立条件である。（作用素値超関数として定義される）自由フェルミオン場は反可換性を満たしている（要請される）ことから，局所ネットはそのような作用素を含んでいない。ただし，局所ネットをガロア拡大した「場の作用素系」には含まれている。また，仮定する時空に応じて，局所ネットに対称性に対する共変性を課すことになる。そして何より，局所ネットは，量子場理論の一般的困難の例に漏れず，具体例を作るのが大変難しい対象なのである。とはいえ，量子場（に伴う様々な量）として満たすべき性質として尤もらしいものを（創始者らが選別した結果）課すことで得られたものが局所ネットであり,（作用素）代数的な手法を駆使できるようになるのが大きな利点である。

量子系を記述するうえで，量を記述する代数とならんで重要な概念が**状態**である。物理量のなす C*-代数を $\mathcal{X}$ とするとき，ω が $\mathcal{X}$ 上の状態であるとは，ω は $\mathcal{X}$ から複素数の集合 $\mathbb{C}$ への写像であって以下の 3 条件を満たすもののことである：

1. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $X, Y \in \mathcal{X}$ に対して，$\omega(\alpha X + \beta Y) = \alpha\,\omega(X) + \beta\,\omega(Y)$.
2. 任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して，$\omega(X^*X) \geq 0$.
3. $\omega(1) = 1$.

すなわち，状態とは期待値汎関数であり，非可換な代数で記述される場合に期待値の概念を拡張したものである。系のあらゆる物理量の期待値が確定しているという想定抜きには状態概念は成立しないこともわかるであろう。現実には，物理的状況（および実験設定）が統計的に定まることに対応して系の状態が（期待値を通して有限精度の範囲で）指定されるとみなす。ちなみに，エンタングルメントと呼ばれる量子系特有の相関は，物理量代数が非可換であることから生じ，状態レベルでの系の独立性・個別性に関する慣習的理解を大きく塗り替えた。

状態概念の本質は前段階の説明で尽きている。しかし，状態を一つ定めるだけでは不足であることも多く，様々な状態を一斉に扱える概念が必要なのも事実である。例えば，異なる温度でのデバイスの性能を比べるなど，物理系の状態の族を扱い，異なる状態の比較は日常的に行われている。このための概念が**中心部分空間**である。物理量のなす代数（ここでは $\mathcal{X}$）が C*-代数であることから，有限ノルムをもつ $\mathcal{X}$ の線型汎関数のなす Banach 空間 $\mathcal{X}^*$ に $\mathcal{X}$ が両側から作用する。$\mathcal{X}$ の元 X, Y と $\mathcal{X}^*$ の元 ω に対し，$X\omega$, ωY, $X\omega Y$ をそれぞれ以下で定義する：任意の $Z \in \mathcal{X}$ に対し，

$$(X\omega)(Z) = \omega(ZX), \quad (\omega Y)(YZ) = \omega(YZ), \quad (X\omega Y)(Z) = \omega(YZX). \tag{1}$$

$\mathcal{X}^*$ の部分空間 $\mathcal{V}$ が中心的であるとは，$\mathcal{V}$ が $\mathcal{X}^*$ の閉部分空間であって，両側不変（任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して，$X\mathcal{V} := \{X\omega \mid \omega \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{V}$ および $\mathcal{V}X := \{\omega X \mid \omega \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{V}$ を満たすこと）であるときをいう（[2] での定義とは異なるが結果的に一致する）。中心部分空間とは，状態空間の複素線型結合から作られる空間の部分空間のなかで，物理量の作用により遷移できる範囲を予め取り込んだものと考えられる。このとき,「では，状況に応じてどのような中心部分空間を選ぶ（用いる）べきか？」という問題は大変重要であるが，その詳細は割愛する。「通常」の量子場理論では，相対論的な状況では真空状態 ω_0 の存在を仮定する。この仮定は，ひとまずはあらゆる状態を考慮に入れているわけではないということと，最低エネルギー状態の存在により系の安定性を保証するために用いられる（もちろんこれ以外にも真空状態の存在が必要とされる場面はたくさんある）。なお，量子場のような無限自由度の量子系を記述する C*-代数の双対空間には「セクター構造」などに関わる解析の難しさが知られている。真空状態 ω_0 に物理量を両側から作用させたものを線型結合させて得られる $\mathcal{X}$ の線型汎関数の集まりは中心部分空間となるので，考察したい状態の族を含む中心部分空間を選ぶことは物理的な議論において自然なことであろう。

物理量，状態と議論してきて，つぎに重要な概念が**量子インストルメント**である。これは，シュレディンガー描像での系の変化を記述する概念であり，与えられた状態（始状態）と測定装置の出力値ごとに測定後の状態を指定する役割がある。量子インストルメントの一般的な定義は測度論的な記述が必要になるが，本稿では簡単のため，考察する測定装置の出力は有限個からなり，測定状況下で中心部分空間 $\mathcal{V}_1$ から $\mathcal{V}_2$ へと変化する状況を考える。このとき，$\mathcal{I}$ が $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, M)$ に対する量子インストルメントであるとは，以下の 2 条件を満たすときをいう [2]：

1. 各 $m \in M$ に対し，$\mathcal{I}(m)$ は $\mathcal{V}_1$ から $\mathcal{V}_2$ への「完全正値写像」である。ここで，完全正値写像とは，合成系をつくっても正値性を保つという正値写像よりも強い数学的条件を満たす写像のことである（詳しくは [2] と引用文献を参照）。
2. 任意の $\omega \in \mathcal{V}_1$ に対し，$\sum_{m \in M} \langle 1_2, \mathcal{I}(m)\omega \rangle = \langle 1_1, \omega \rangle$ を満たす。ここで 1_j（$j = 1, 2$）は，$\mathcal{V}_j$ の双対空間 $\mathcal{V}_j^*$ の C^*-代数としての単位元である。

量子測定理論では，測定装置は量子インストルメントによって記述され，状態 ω において測定装置の出力値 m が出る確率は

$$\Pr\{\boldsymbol{x} = m \| \omega\} = \|\mathcal{I}(m)\omega\| \tag{2}$$

によって与えられ，これが 0 でないときは，測定後の状態が

$$\omega_m = \frac{\mathcal{I}(m)\omega}{\|\mathcal{I}(m)\omega\|} \tag{3}$$

で与えられる。量子インストルメントによって測定が特徴づけられることで，Heisenberg の不等式の破れや小澤の不等式の証明，それらの実験的検証へとつながった。

量子場理論においては状態概念も量子インストルメントも再検討が必要であるとの見解をもち著者はこの数年研究している。その根底には，実験においてアクセスできる物理量の範囲の問題などがあるからである。これは局所ネットを用いていることではじめてできる発想である。また，[2] で言及したように，ドレスト光子の発生する系に対する測定においては，測定装置と測定される対象が不可分になる状況が加わるため，ダイナミクスへの深い洞察も合わせて行う必要が出てくる。数学的アプローチから概念を整理し，ドレスト光子の特殊性および普遍性をより広い対象との関わりから探っていくことは実りある研究になると考えている。

参考文献

[1] 大津 元一，小嶋 泉 編著，『ここからはじまる量子場 ―ドレスト光子が開くオフシェル科学―』，(朝倉書店, 2020).

[2] K. Okamura, Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum Fields, Symmetry **13**, (2021) 1183. https://doi.org/10.3390/sym13071183